

**EXERCICE 2****5 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points

$$A(1; 0; -1), \quad B(3; -1; 2), \quad C(2; -2; -1) \quad \text{et} \quad D(4; -1; -2).$$

On note  $\Delta$  la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. a. On a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  : ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (en comparant les

premières coordonnées, s'il l'étaient on aurait  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ , ce qui est faux), donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan unique  $\mathcal{P}$ .

- b. On a  $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , puis

- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 - 1 - 3 = 0$ ;
- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 2 + 0 = 0$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{CD}$  est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan  $\mathcal{P}$ , c'est donc un vecteur normal à ce plan.

Puisque  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  les droites (CD) et (AC) sont perpendiculaires en C, donc C est le projeté orthogonal de D sur le plan  $\mathcal{P}$ .

- c. Puisque  $\overrightarrow{CD}$  est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$ , on sait que ses coordonnées sont dans l'ordre les coefficients  $a, b, c$  de  $x, y, z$ , soit :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff 2x + 1y - 1z + d = 0.$$

$$\text{En particulier } C(2; -2; -1) \in \mathcal{P} \iff 2 \times 2 + 1 \times (-2) - 1 \times (-1) + d = 0 \iff 4 - 2 + 1 + d = 0 \iff d = -3.$$

$$\text{Finalement : } M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff 2x + y - z - 3 = 0.$$

2. a. On a grâce aux coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{CD}$ ,  $CD^2 = 4 + 1 + 1 = 6$ , d'où  $CD = \sqrt{6}$ .
- b. Puisque C est le projeté orthogonal de D sur le plan  $\mathcal{P}$ , ce point est celui qui est à la plus courte distance du point D, soit  $\sqrt{6}$  : il n'existe donc pas d'autre point de  $\mathcal{P}$  situé à cette distance  $\sqrt{6}$  de D;
- Ou encore : la sphère de centre D et de rayon  $\sqrt{6}$  est tangente en C au plan  $\mathcal{P}$ , donc quel que soit M dans  $\mathcal{P}$ , le triangle DCM est rectangle en C, d'hypoténuse [DM] et l'on sait qu'alors  $DM > DC = \sqrt{6}$  : tout point M du plan a une distance supérieure à  $\sqrt{6}$  de D.

3. a. Si  $M(x; y; z)$  est commun à  $\Delta$  et à  $\mathcal{P}$  ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \Rightarrow 2 \times 0 + 2 + t - (-1 + t) - 3 = 0 \iff 0 = 0 : \text{ ceci}$$

signifie que tout point de  $\Delta$  appartient à  $\mathcal{P}$  donc que  $\Delta$  est incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ .

Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite  $\Delta$ .

- b. Un vecteur directeur de la droite  $\Delta$  est  $\delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et avec  $H(0; 2 + t; -1 + t)$ , on a  $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 + t \\ 1 + t \end{pmatrix}$ .

Or  $(DH) \perp \Delta \Rightarrow \delta \cdot \overrightarrow{DH} = 0 \iff 0 + 3 + t + 1 + t = 0 \iff 4 + 2t = 0 \iff 2t = -4 \iff t = -2$ .

On a donc  $H(0 ; 0 ; -3) \in \Delta$ .

c. On a donc  $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 4 \\ 3-2 \\ 1-2 \end{pmatrix}$ , soit  $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; il en résulte que  $DH^2 = 4^2 + 1^2 + (-1)^2 = 18$ .

Finalemment  $DH = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ .